

Estabilidad con múltiples funciones de Lyapunov aplicado a la serie de Collatz

Autor:

Mg. Ing. Lorgio Teodovich



Instituto de Automatica
(INAUT)
Universidad Nacional de San Juan



Universidad Nacional
de Tucumán

Agenda

- **Modelo matemático**
- **Representación como Grafo**
- **Sistema conmutado**
- **Prueba de estabilidad**
- **Conclusiones**



Modelo Matemático

- El sistema se define como una función definida a tramos.
- Inicia en un número N positivo entero

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \equiv 0 \pmod{2} \\ 3x + 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$x_0 = N, \quad N \in \mathbb{N}^+$$



Modelo Matemático

- La serie de Collatz se define como la trayectoria que inicia en el número N y eventualmente llega a un ciclo

$$\{N, C(N), C(C(N)), \dots, 1, \dots\} =$$

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$$

$$x_0 = N, \quad x_{n+1} = C(x_n)$$

donde k , es el menor valor tal que $x_k = 1$



Modelo Matemático

- Ej.: $N=7$

$$x_0 = 7 \text{ es impar} \rightarrow 3 \cdot 7 + 1 = 22$$

$$22 \text{ es par} \rightarrow 22 / 2 = 11$$

$$11 \text{ es impar} \rightarrow 34$$

$$34 \text{ es par} \rightarrow 17$$

$$17 \text{ es impar} \rightarrow 52$$

$$52 \text{ es par} \rightarrow 26$$

$$26 \text{ es par} \rightarrow 13$$

$$13 \text{ es impar} \rightarrow 40$$



Modelo Matemático

- Ej.: $N=7$, continuación

40 es par \rightarrow 20

20 es par \rightarrow 10

10 es par \rightarrow 5

5 es impar \rightarrow 16

16 es par \rightarrow 8

8 es par \rightarrow 4

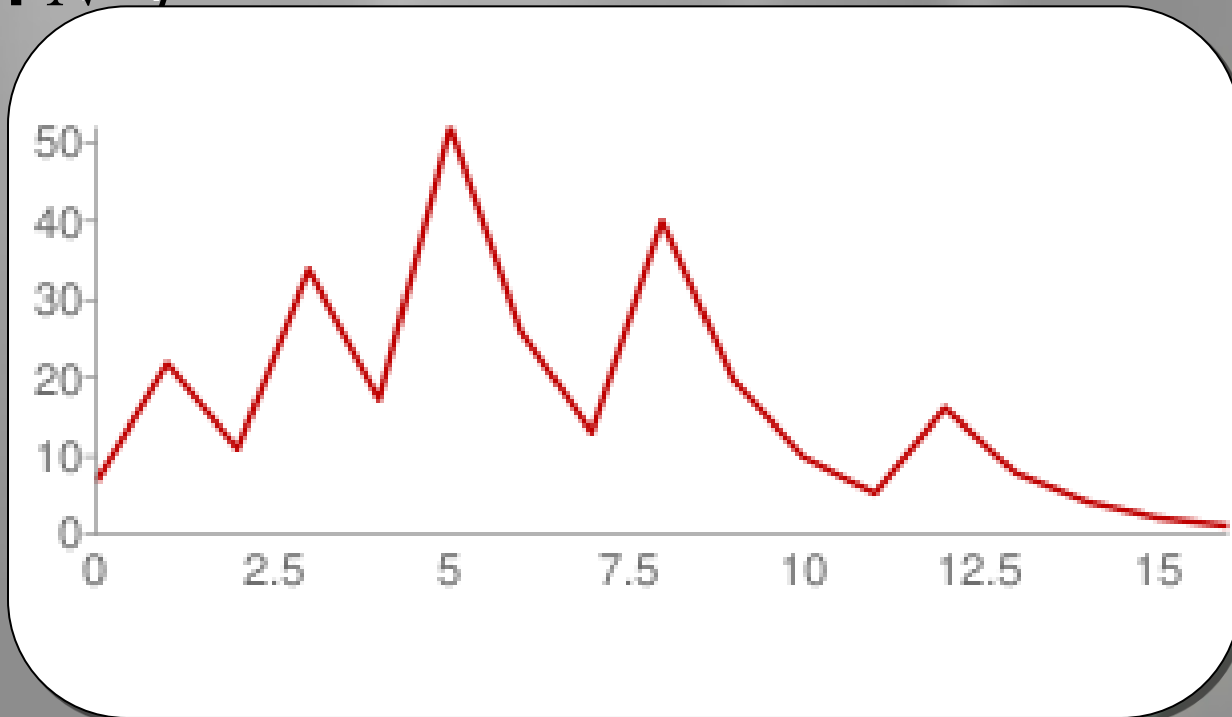
4 es par \rightarrow 2

2 es par \rightarrow 1



Modelo Matemático

- Ej.: $N=7$



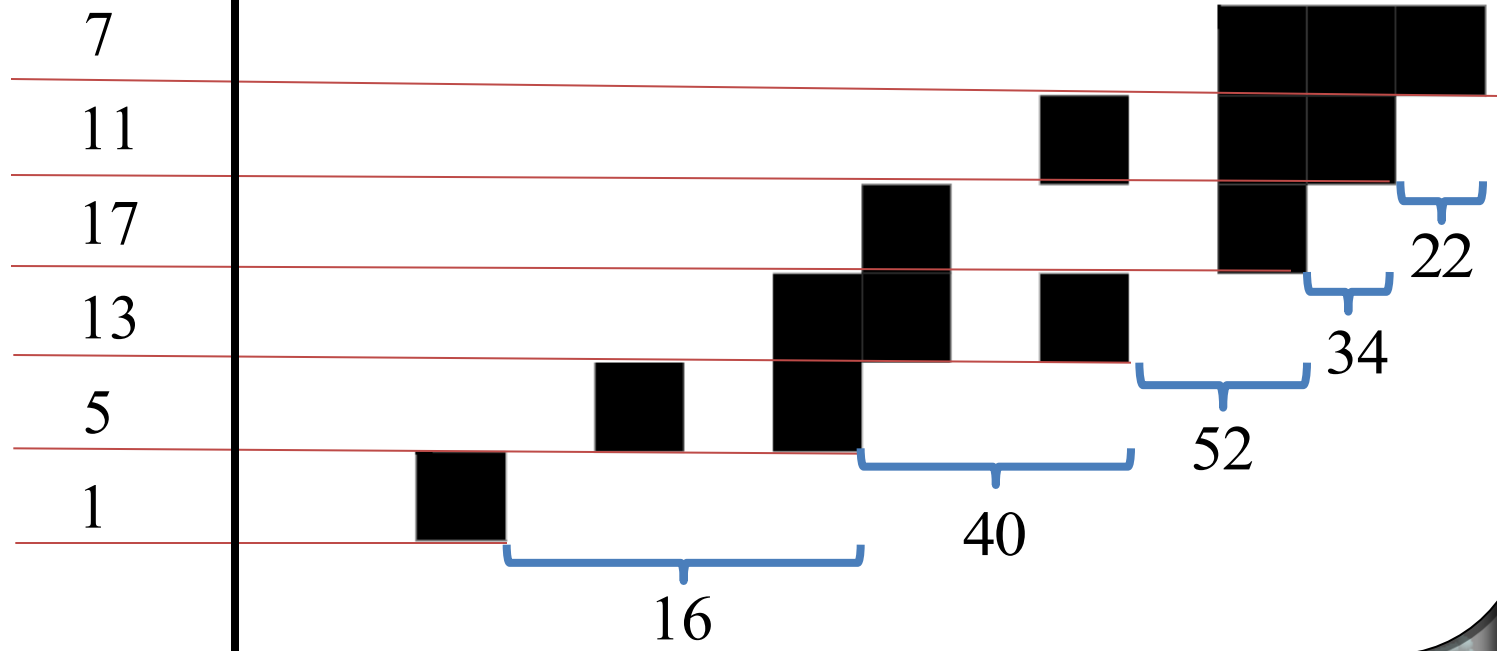
- Total 16 iter. max.=52
- <http://www.ericr.nl/wondrous/index.html>



Modelo Matemático

- Ej.: $N=7$, en binario conservando posición relativa

Número impar



- <https://observablehq.com/d/f92a378ae2fde598?numStr=7>



Grafo Dirigido

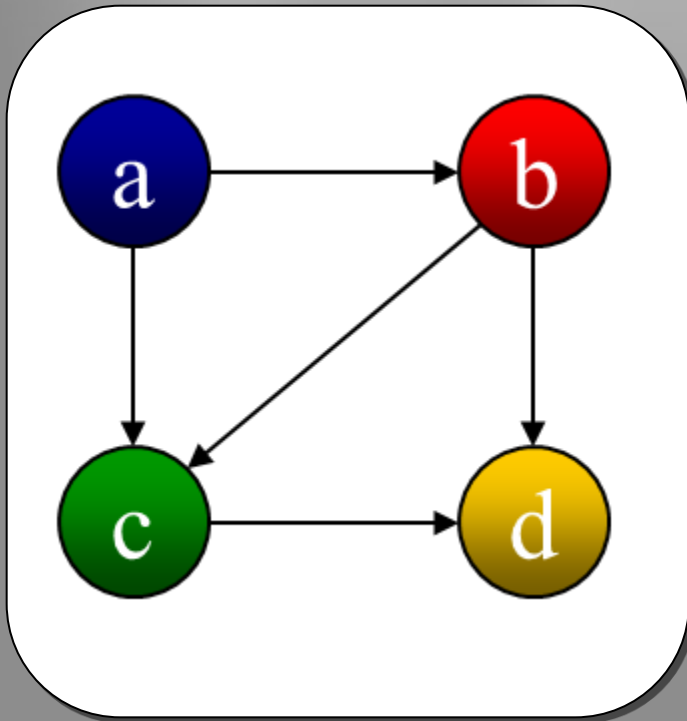
- Un grafo esta formado por

$$G=(V,E)$$

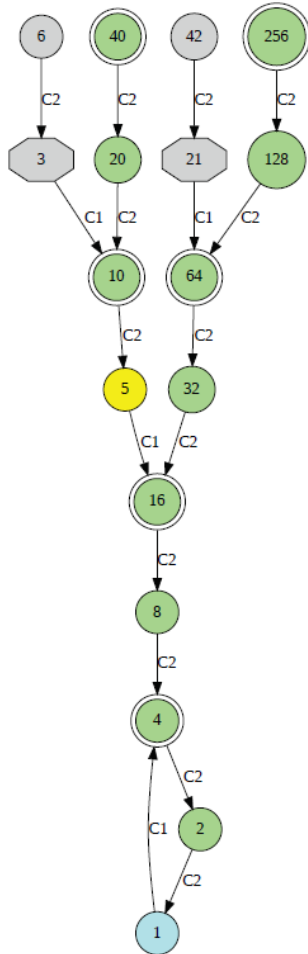
donde V es un conjunto de nodos y E un conjunto aristas o arcos.

En el caso de un grafo dirigido , cada arista tiene una dirección.

Si existen bucles, será un multigrafo o pseudografo

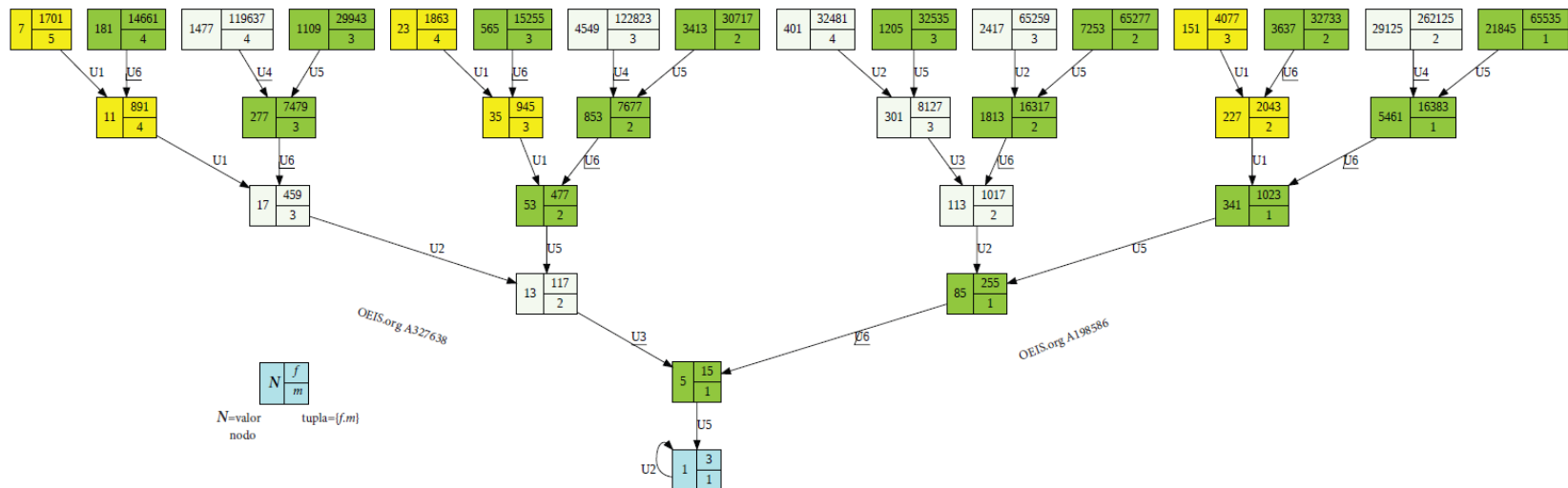


Grafo Dirigido



- En una primera aproximación se plantea un grafo dirigido utilizando distintas semillas y conectando entre si las trayectorias.
- C1 representa $3x+1$
- C2 para $x/2$

Grafo Dirigido

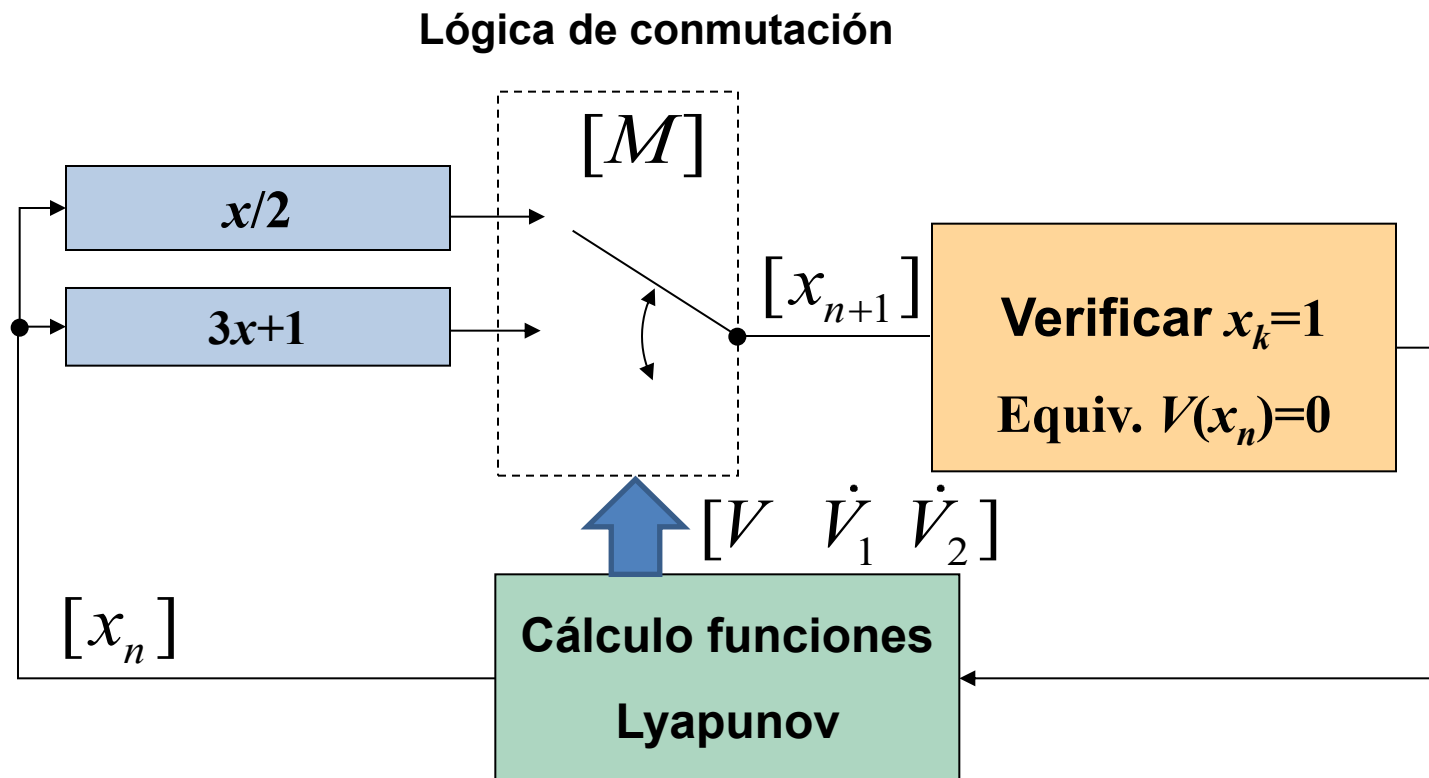


- Ese puede expresar como un árbol binario, al eliminar los múltiplos de 3.



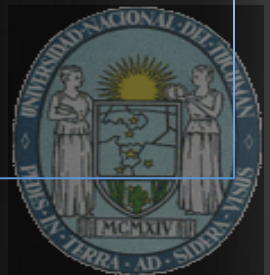
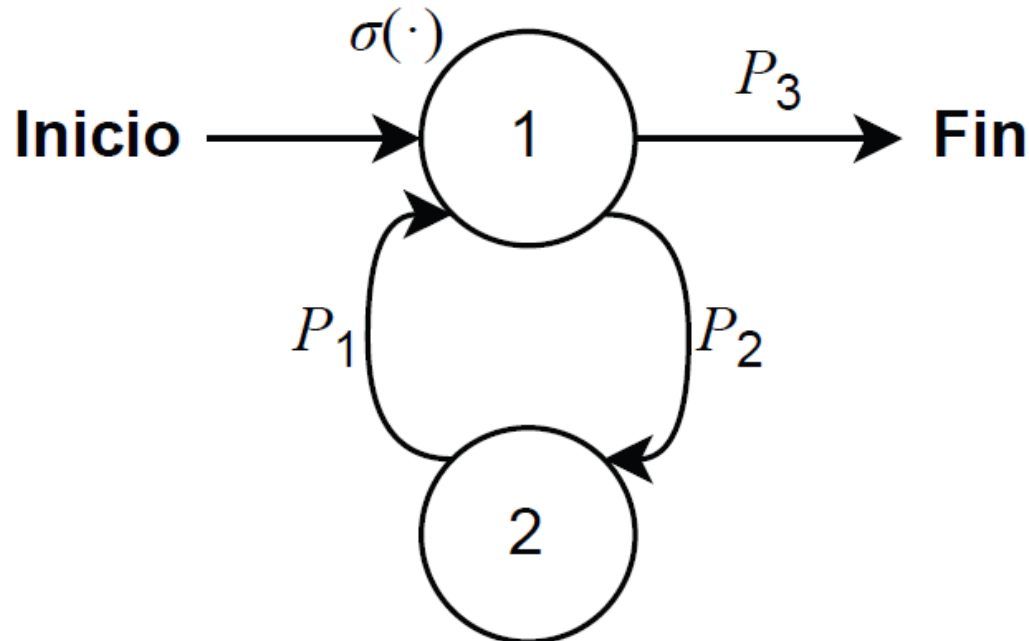
Sistema conmutado

- Modelo conmutado autónomo



Sistema conmutado

Lógica de conmutación



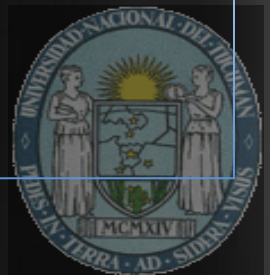
Estrategia de conmutación

Lógica de conmutación

$$P_1 \leftarrow x_n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$P_2 \leftarrow x_n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$P_3 \leftarrow V(x_n) = 0$$



Factorización

- Se expresa el número N positivo, factorizado en el formato: Böhm Sontacchi

$$N = \frac{2^{v_0} - \sum_{j=1}^m 3^{j-1} 2^{v_j}}{3^m}$$



Factorización

- **Factorización Böhm Sontacchi**
se define

$$f(x_n + 1) = \left\{ \frac{3x_n + 1}{2^{a(x_n)}} \right\}, \quad a(x_n) \in \mathbb{N}$$

tal que $2^{a(x_n)}$ divide en forma exacta a $3x_n + 1$



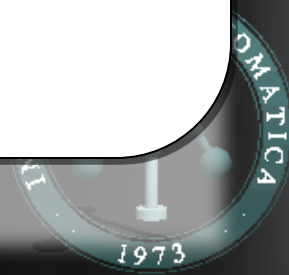
Factorización

- Factorización Böhm Sontacchi

$$x_0 = N$$

$$x_1 = \frac{3x_0 + 1}{2^{\alpha_0}}$$

$$x_2 = \left(3 \frac{3x_0 + 1}{2^{\alpha_0}} + 1 \right) / 2^{\alpha_1} = \frac{3^2 x_0 + 3 + 2^{\alpha_0}}{2^{\alpha_0 + \alpha_1}}$$



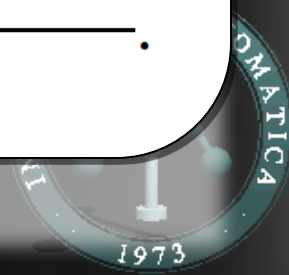
Factorización

- Factorización Böhm Sontacchi

$$x_3 = \frac{3^3 x_0 + 3^2 + 3 \cdot 2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_0 + \alpha_1}}{2^{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}}$$

\vdots

$$x_{n+1} = \frac{3^{n+1} x_0 + 3^n + \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-j-1} 2^{\alpha_0 + \dots + \alpha_j}}{2^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}}.$$



Factorización

- Se expresa el número N positivo, factorizado en el formato: Böhm Sontacchi

$$N = \frac{2^{v_0} - \sum_{j=1}^m 3^{j-1} 2^{v_j}}{3^m}$$

$$x_0 = 7, \quad v = [7, 4, 2, 1, 0]$$



Factorización

- Luego se pasa a una tupla de tres elementos

$$y = \{h, r, m\}$$

$$N = \frac{2^{v_0} - \sum_{j=1}^m 3^{j-1} 2^{v_j}}{3^m}$$

$$h = v_0, \quad r = \sum_{j=1}^m 3^{j-1} 2^{v_j}$$



Nuevo modelo matemático

- La dinámica del nuevo sistema es

$$G(\{h_{n+1}, r_{n+1}, m_{n+1}\}) = \begin{cases} \{h_n - 1, \frac{r_n}{2}, m_n\} & \text{si } r_n \equiv 0(\text{mod } 2) \\ \{h_n, r_n - 3^{m_n-1}, m_n - 1\} & \text{otro caso} \end{cases} .$$

Demostración de estabilidad

- La función de múltiple de Lyapunov es:

$$V(y) = V(\{h, r, m\}) = h + r + m$$



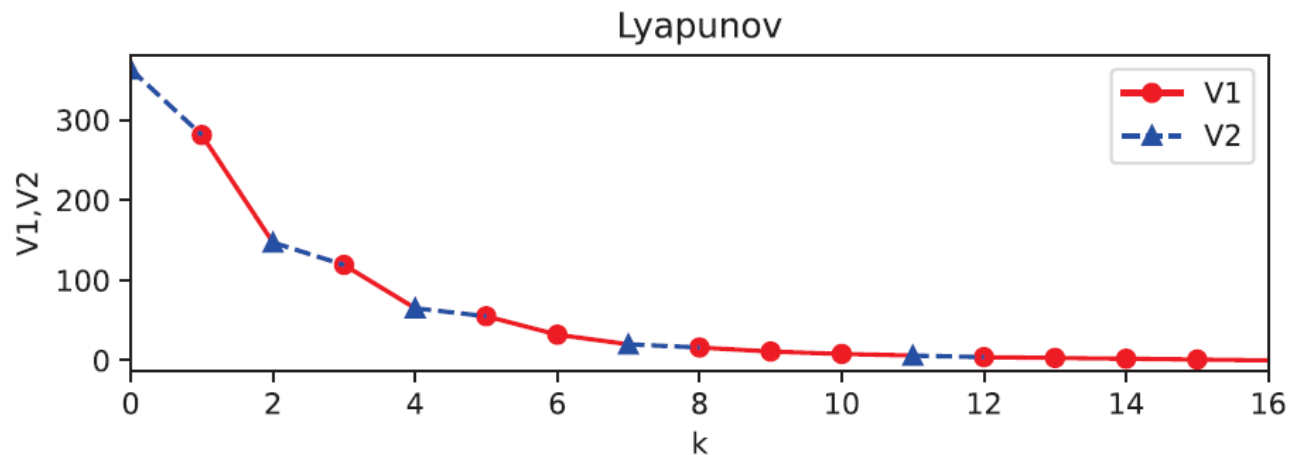
Demostración de estabilidad

- Para $N=7$:

k	Serie	Canon, tupla		Lyapunov			Estr.
		v	$\{h, r, m\}$	V	\dot{V}_1	\dot{V}_2	
0	7	$\langle 11, 7, 4, 2, 1, 0 \rangle$	$\{11, 347, 5\}$	363		-82	2
1	22	$\langle 11, 7, 4, 2, 1 \rangle$	$\{11, 266, 4\}$	281	-134		1
2	11	$\langle 10, 6, 3, 1, 0 \rangle$	$\{10, 133, 4\}$	147		-28	2
3	34	$\langle 10, 6, 3, 1 \rangle$	$\{10, 106, 3\}$	119	-54		1
4	17	$\langle 9, 5, 2, 0 \rangle$	$\{9, 53, 3\}$	65		-10	2
5	52	$\langle 9, 5, 2 \rangle$	$\{9, 44, 2\}$	55	-23		1
6	26	$\langle 8, 4, 1 \rangle$	$\{8, 22, 2\}$	32	-12		1
7	13	$\langle 7, 3, 0 \rangle$	$\{7, 11, 2\}$	20		-4	2
8	40	$\langle 7, 3 \rangle$	$\{7, 8, 1\}$	16	-5		1
9	20	$\langle 6, 2 \rangle$	$\{6, 4, 1\}$	11	-3		1
10	10	$\langle 5, 1 \rangle$	$\{5, 2, 1\}$	8	-2		1
11	5	$\langle 4, 0 \rangle$	$\{4, 1, 1\}$	6		-2	2
12	16	$\langle 4 \rangle$	$\{4, 0, 0\}$	4	-1		1
13	8	$\langle 3 \rangle$	$\{3, 0, 0\}$	3	-1		1
14	4	$\langle 2 \rangle$	$\{2, 0, 0\}$	2	-1		1
15	2	$\langle 1 \rangle$	$\{1, 0, 0\}$	1	-1		1
16	1	$\langle 0 \rangle$	$\{0, 0, 0\}$	0			-

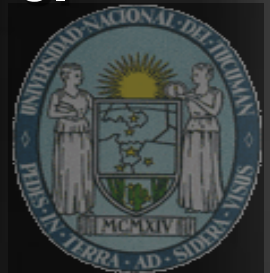
Demostración de estabilidad

- Para $N=7$:



Conclusiones

- Se propone modelar la serie de Collatz como un sistema conmutado autónomo híbrido. Que mediante la factorización de Böhm Sontacchi permite demostrar la estabilidad del sistema con Lyapunov.
- La estabilidad se demuestra, adaptado técnicas empleadas en robótica, usando funciones múltiples de Lyapunov.
- Además, al tener una función de Lyapunov decreciente, se demuestra que no hay ciclos en el sistema. Por lo tanto la conjetura es verdadera.

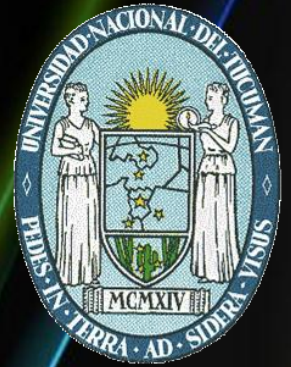


Fin de la presentación

Gracias



Preguntas ?



Semana AADECa

Contribuyendo con conocimiento al desarrollo productivo