# An Example of Input-to-State Stability Analysis of a Nonlinear Cross Flow Heat Exchanger in a Mash Brewing System

29 Congreso AADECA
Agosto 2025

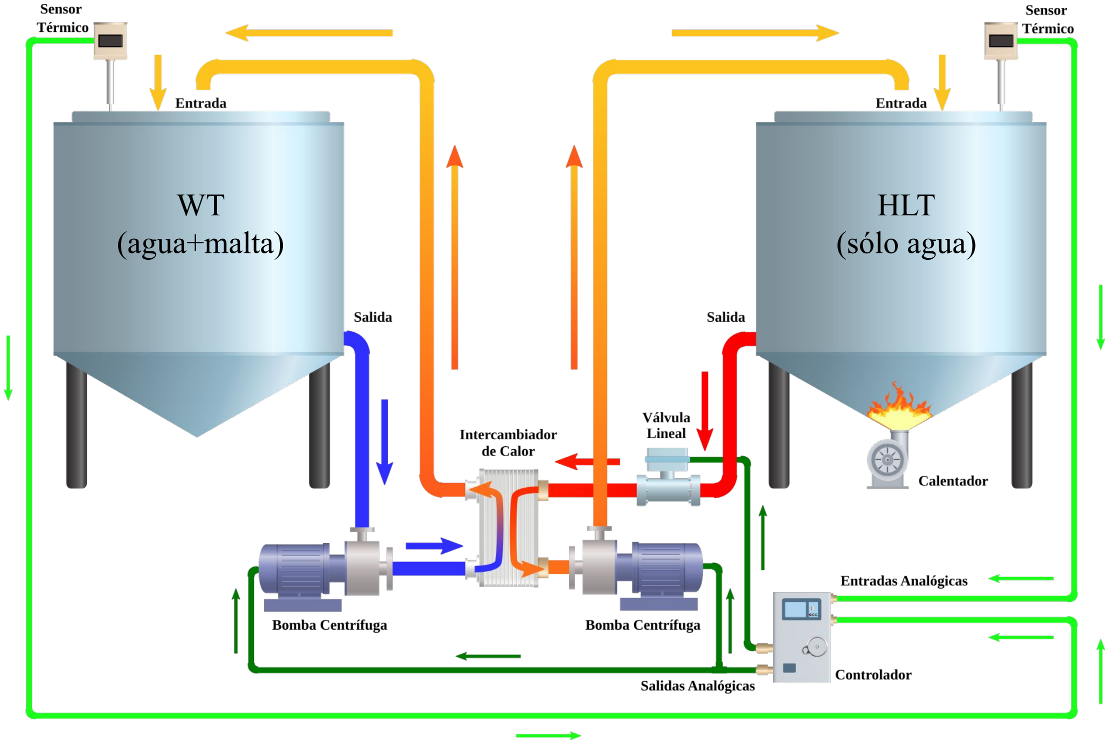
Jorge Quelas

# Índice

# 1.

# Sistema Modelado

# Planta Piloto

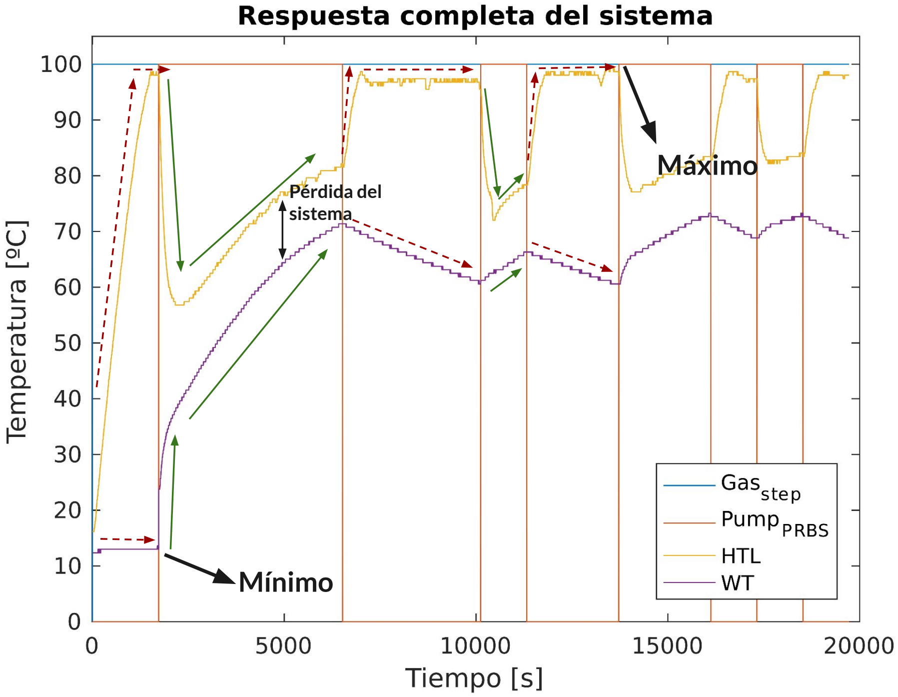



Densidad:
- Agua: 1000 kg/m$^3$
- Agua con malta: 1015 a 1060 kg/m$^3$

Calor Específico:
- Agua: 4.18 kJ/kgK
- Agua con malta:
  - 4.1 kJ/kgK (1030 kg/m$^3$)
  - 3.6 kJ/kgK (1060 kg/m$^3$)

Temperatura de ebullición:
- Agua: 100°C
- Agua con malta: 100,236°C

# Respuesta completa del sistema




Sistemas acoplados
Sistemas desacoplados

**Mínimo absoluto**:
Temperatura ambiente

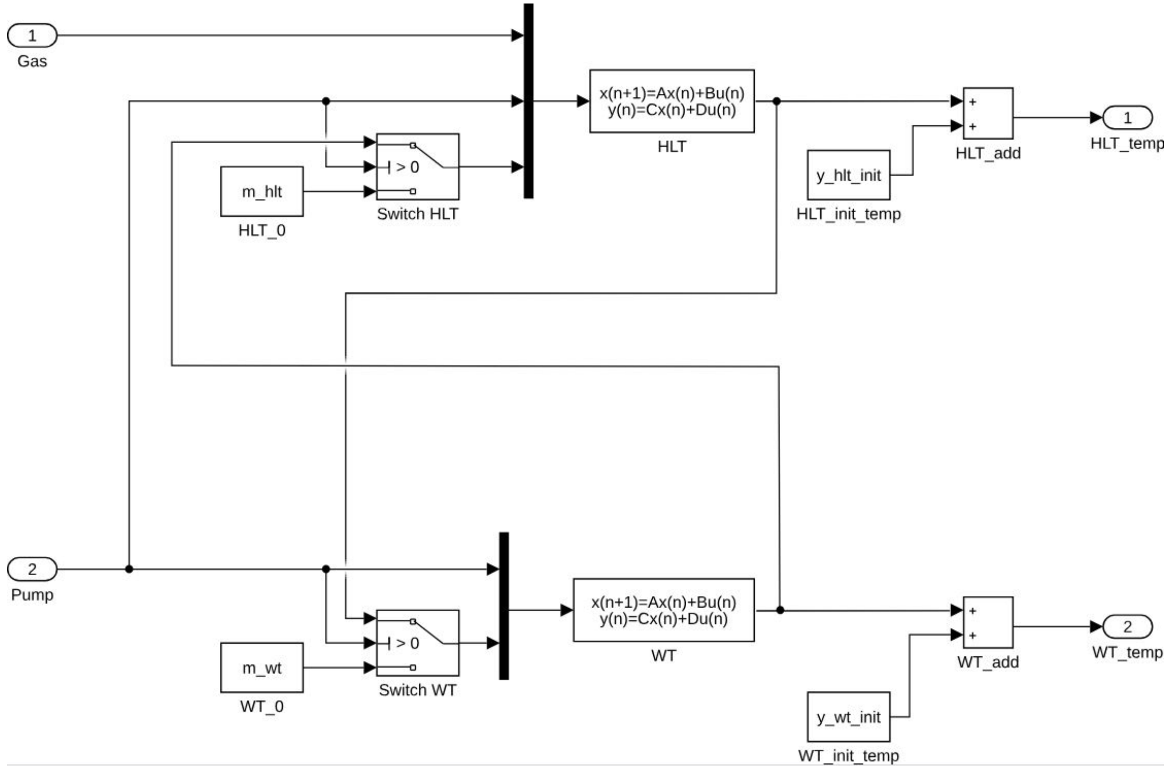
**Máximo absoluto**:
Temperatura de ebullición de la mezcla.

Agua: 100ºC
Agua con malta: 100,236ºC

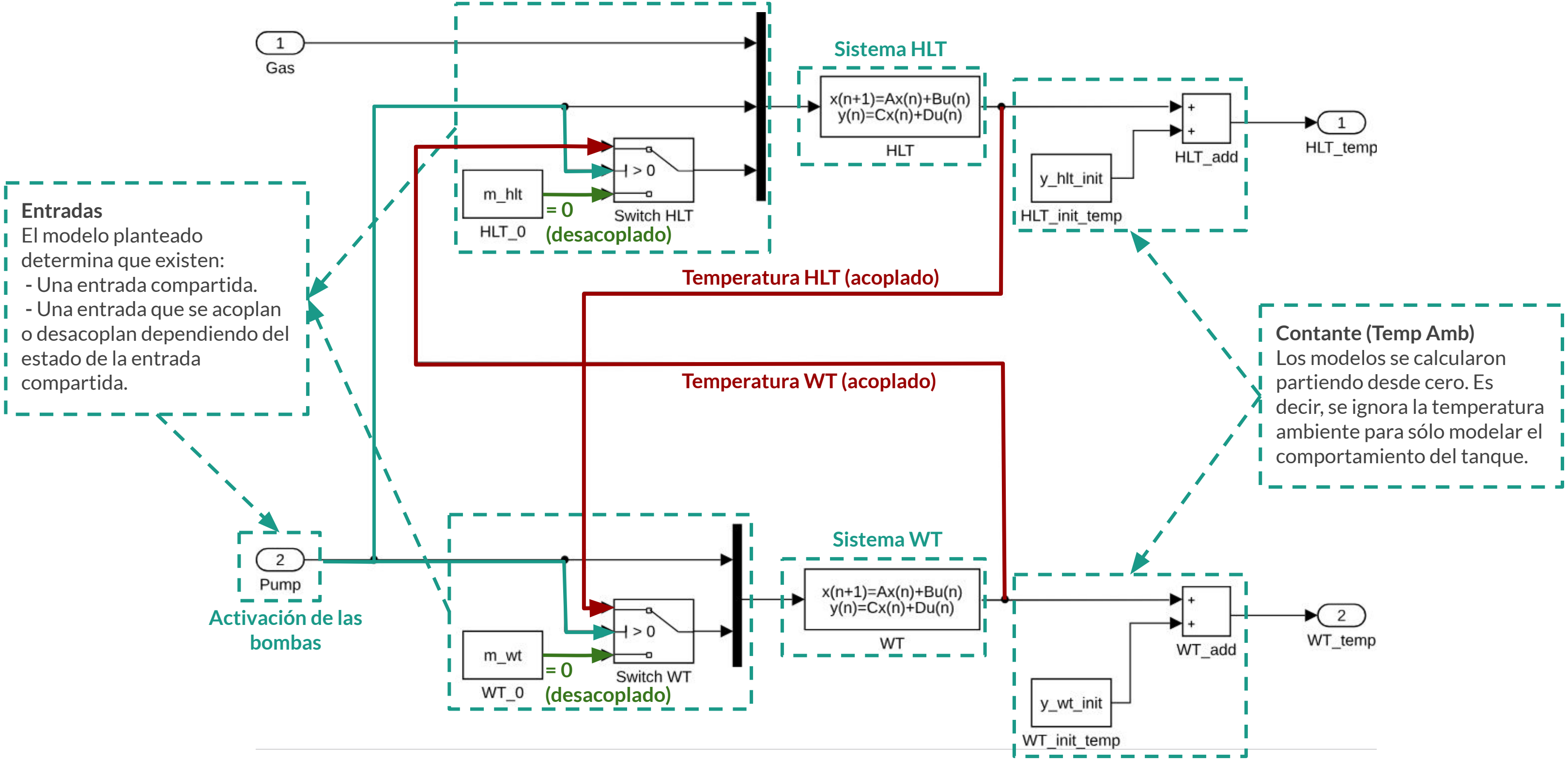
# 2.

# Modelos Seleccionado

# Modelo de la planta



# Modelo de la planta



# Modelo del sistema HLT

### Modelo Seleccionado

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

### Modelo HLT

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{hlt1}((k+1)T) \\ \dot{x}_{hlt2}((k+1)T) \\ \dot{x}_{hlt3}((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{hlt1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{hlt2} & 0 \\ 0 & 0 & g_{hlt3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{hlt1}(kT) \\ x_{hlt2}(kT) \\ x_{hlt3}(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{hlt1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{hlt2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{hlt3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ u_3(kT) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$y_{hlt}(kT) = \begin{bmatrix} c_{hlt1} & c_{hlt2} & c_{hlt3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{hlt1}(kT) \\ x_{hlt2}(kT) \\ x_{hlt3}(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{hlt1} & d_{hlt2} & d_{hlt3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ u_3(kT) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

# Modelo de la planta WT

## Modelo Seleccionado

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

## Modelo WT

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{wt1}((k+1)T) \\ \dot{x}_{wt2}((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{wt1} & 0 \\ 0 & g_{wt2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{wt1}(kT) \\ x_{wt2}(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{wt1} & 0 \\ 0 & h_{wt2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2(kT) \\ u_4(kT) \end{bmatrix}$$

$$y_{wt}(kT) = \begin{bmatrix} c_{wt1} & c_{wt2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{wt1}(kT) \\ x_{wt2}(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{wt1} & d_{wt2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2(kT) \\ u_4(kT) \end{bmatrix}$$

# Modelo del sistema completo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{hlt}((k+1)T) = \mathbf{G}_{hlt} \cdot \mathbf{x}_{hlt}(kT) + \mathbf{H}_{hlt} \cdot \mathbf{u}_{hlt}(kT) \\ y_{hlt}(kT) = \mathbf{C}_{hlt} \cdot \mathbf{x}_{hlt}(kT) + \mathbf{D}_{hlt} \cdot \mathbf{u}_{hlt}(kT) \end{cases}$$

**Sistema HLT**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{wt}((k+1)T) = \mathbf{G}_{wt} \cdot \mathbf{x}_{wt}(kT) + \mathbf{H}_{wt} \cdot \mathbf{u}_{wt}(kT) \\ y_{wt}(kT) = \mathbf{C}_{wt} \cdot \mathbf{x}_{wt}(kT) + \mathbf{D}_{wt} \cdot \mathbf{u}_{wt}(kT) \end{cases}$$

**Sistema WT**

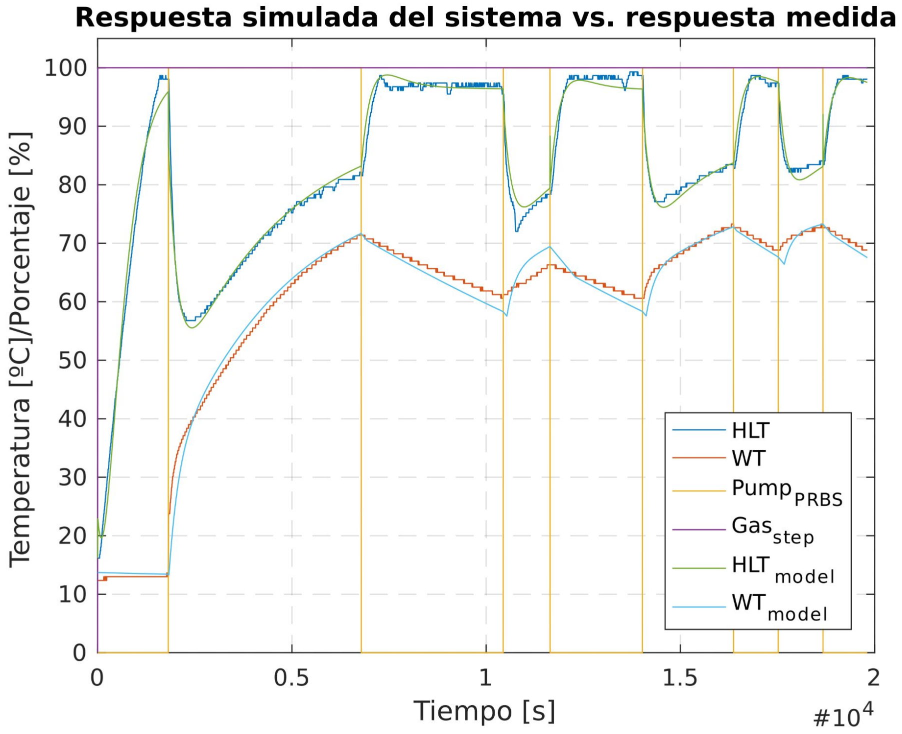
$$\mathbf{u}_{hlt} = \begin{bmatrix} u_{hlt1}(kT) \\ u_{hlt2}(kT) \\ u_{hlt3}(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ \boxed{u_2(kT)} \\ \boxed{u_3(kT)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{wt} = \begin{bmatrix} u_{wt1}(kT) \\ u_{wt2}(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{u_2(kT)} \\ \boxed{u_4(kT)} \end{bmatrix}$$

**Relación entre las entradas**

$$\begin{cases} u_2(kT) = 0 & \begin{cases} u_3(kT) = 0 \\ u_4(kT) = 0 \end{cases} \\ u_2(kT) > 0 & \begin{cases} u_3(kT) = y_{wt} \\ u_4(kT) = y_{hlt} \end{cases} \end{cases}$$

# Validación del modelo



# Error del modelo


Error del sistema:

$$Y_{pe} = \frac{Y_m - Y_{est}}{Y_m} \cdot 100\%$$

RMSE:

$$Y_{rmse} = \sqrt{\frac{1}{f} \cdot \sum_{n=1}^{n=f} (Y_{est_n} - Y_{m_n})^2}$$

# 3.

# Análisis de Estabilidad

# Estabilidad ISS

**ISS** (**I**nput-to-**S**tate **S**tability) permite determinar la estabilidad de sistemas:

- **MIMO** (**M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput)
- No lineales
- Invariantes en el tiempo
- Con entradas

Para que el sistema sea **ISS** debe cumplir dos condiciones:

- El sistema debe ser **0-GAS** (**G**lobally **A**symptotically **S**table at **Z**ero)
- El sistema debe poseer la propiedad **AG** (**A**symptotic **G**ain)

**Estabilidad por Lyapunov**: Existen distintos tipos de estabilidad. La normalmente deseada es llamada de dos formas, dependiendo el autor, Estabilidad Asintótica Global o Estabilidad Exponencial. Si el sistema es estable alrededor del origen entonces se lo denomina 0-GAS.

# Estabilidad 0-GAS

Para que un sistema sea **0-GAS** debe cumplir el **Teorema de Estabilidad Exponencial de Lyapunov**:

**Teorema** *Se define un sistema de tiempo discreto* $\boldsymbol{x}((k+1)T) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(kT))$ *donde* $T$ *es e tiempo de muestreo,* $\boldsymbol{x}$ *es un vector de* $n$ *elementos, al igual que* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *siendo* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$*. Si existe una función escalar* $V(\boldsymbol{x})$ *continua en* $\boldsymbol{x}$ *tal que:*

1. $V(\boldsymbol{x}) > 0$ *para* $\boldsymbol{x} \neq 0$.
2. $\Delta V(\boldsymbol{x}) < 0$ *para* $\boldsymbol{x} \neq 0$, *donde:*

$$\Delta V(\boldsymbol{x}(kT)) = V(\boldsymbol{x}((k+1)T)) - V(\boldsymbol{x}(kT)) = V(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(kT))) - V(\boldsymbol{x}(kT))$$

3. $V(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$
4. $V(\boldsymbol{x}) \rightarrow \infty$ *cuando* $||\boldsymbol{x}|| \rightarrow \infty$.

**Si las entradas del sistema son iguales a 0, entonces cada tanque puede ser evaluado por separado como sistemas MIMO LTI.**

# Estabilidad 0-GAS

Cuando las entradas son iguales a cero, la ecuación de estado de cada sistema será:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(k)$$

Se propone la siguiente **función de Lyapunov**, y su respectiva **derivada**:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(k)$$

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = -\mathbf{x}^T(k) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(k)$$

Con $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, y despejando se obtiene la siguiente igualdad:

$$\boxed{(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{P}) = -\mathbf{I}}$$

$$\begin{bmatrix} g_{hlt1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{hlt2} & 0 \\ 0 & 0 & g_{hlt3} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{hlt1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{hlt2} & 0 \\ 0 & 0 & g_{hlt3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -c_{11}p_{11} & -c_{12}p_{12} & -c_{13}p_{13} \\ -c_{21}p_{21} & -c_{22}p_{22} & -c_{23}p_{23} \\ -c_{31}p_{31} & -c_{32}p_{32} & -c_{33}p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Estabilidad 0-GAS

$$-c_{11}p_{11} = -1 \Rightarrow p_{11} = \frac{1}{c_{11}} \qquad \text{Si } c_{11} > 0 \Rightarrow p_{11} > 0$$

$$-c_{22}p_{22} = -1 \Rightarrow p_{22} = \frac{1}{c_{22}} \qquad \text{Si } c_{22} > 0 \Rightarrow p_{22} > 0$$

$$-c_{33}p_{33} = -1 \Rightarrow p_{33} = \frac{1}{c_{33}} \qquad \text{Si } c_{33} > 0 \Rightarrow p_{33} > 0$$

$$-c_{nm}p_{nm} = 0 \Rightarrow p_{nm} = 0 \qquad \text{Donde } n \neq m$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_{33}} \end{bmatrix}$$

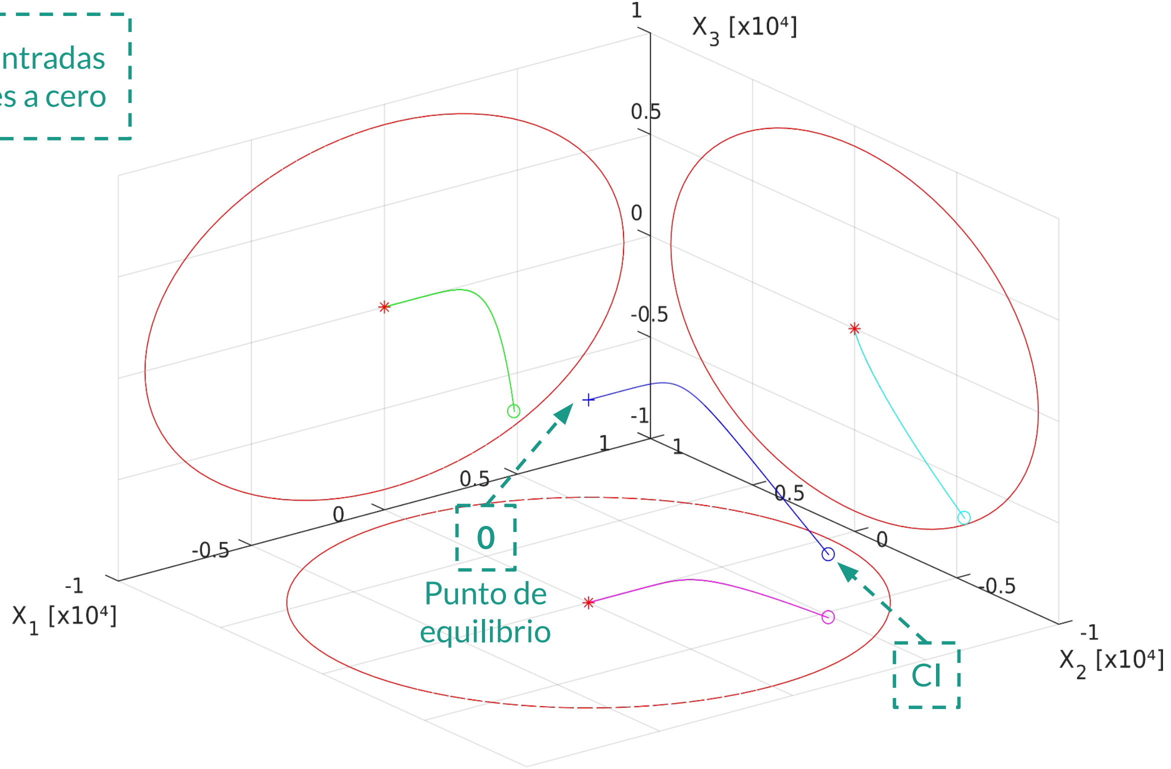
$$\mathbf{P}_{hlt} = \begin{bmatrix} 393{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 41{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 55{,}71 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{wt} = \begin{bmatrix} 2720{,}9 & 0 \\ 0 & 3243{,}6 \end{bmatrix}$$

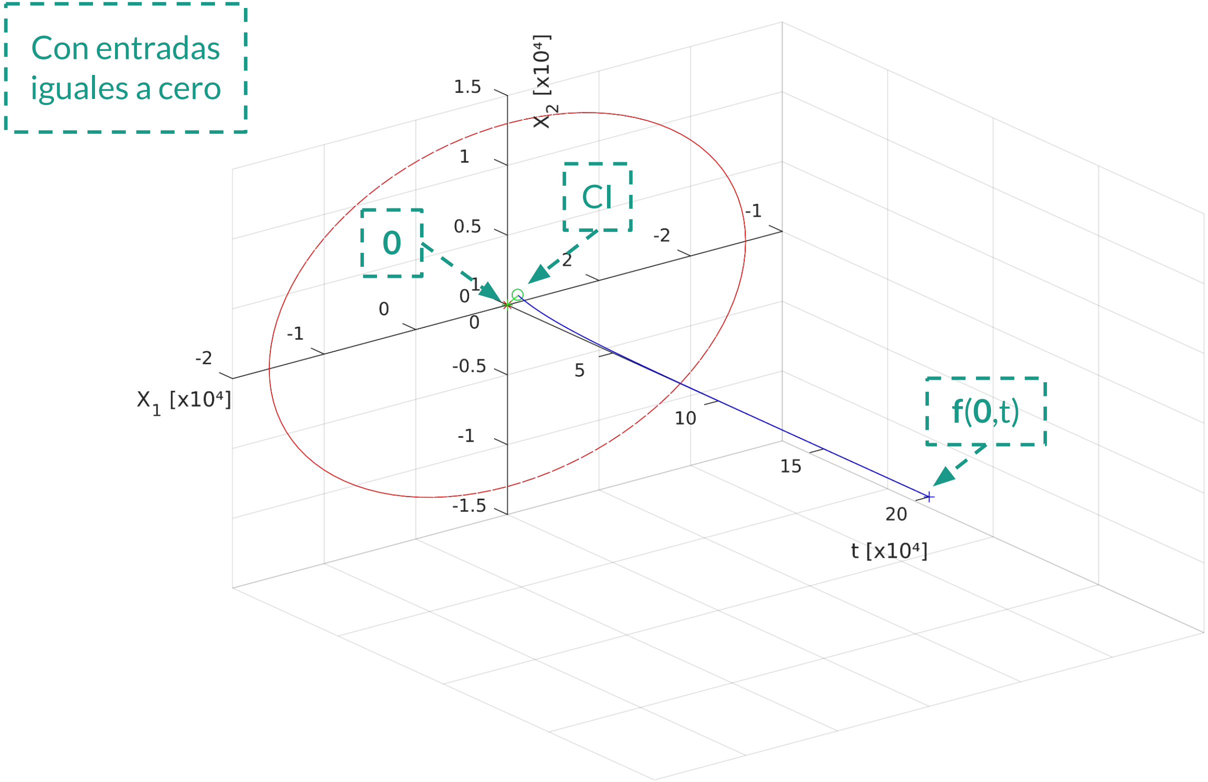
La matriz **P** debe ser definida positiva para que la función de Lyapunov propuesta cumpla con el teorema de estabilidad exponencial. Ambas matrices cumplen por lo que **cada sistema puede considerarse 0-GAS**.

# Estabilidad 0-GAS

Con entradas
iguales a cero



# Estabilidad 0-GAS



# Propiedad AG del sistema

Para que un sistema posea la propiedad **AG** debe cumplir el siguiente enunciado:

Si existe $\gamma \in K$ tal que $\forall \mathbf{x}_0$ y $\forall \mathbf{u}$ se cumple que:

**Máximo valor del vector de estados**

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} sup|\mathbf{x}|} \leq \boxed{\gamma(||\mathbf{u}||_\infty)}$$

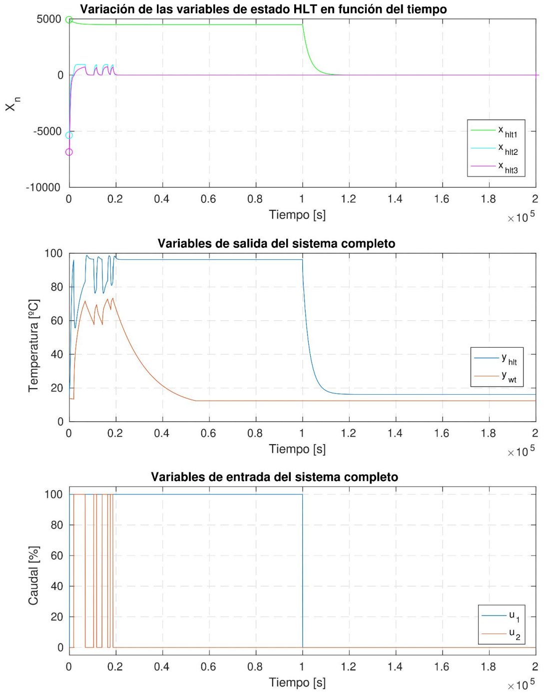
**Envolvente proporcional al valor máximo que puede adquirir la entrada**

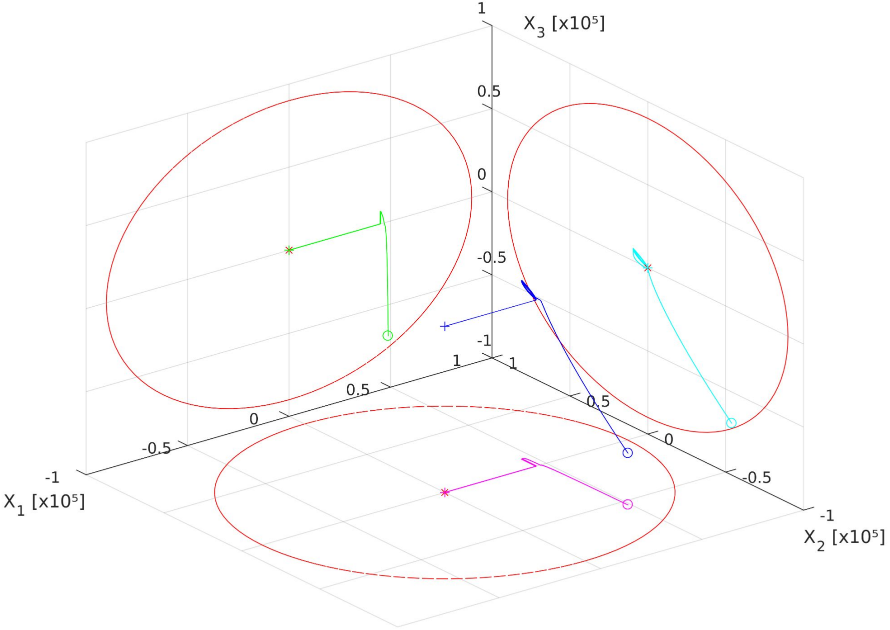
Entonces el sistema posee la propiedad de ganancia asintótica o AG

**Se simulan dos escenarios:**

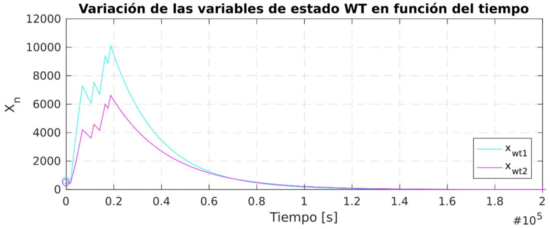
- **La señal de identificación PRBS:** Se observa cómo responde la planta ante una entrada aleatoria entre máximo y mínimo de la señal de entrada.
- **Un escalón unitario en cada entrada:** Se mueve el sistema de forma constante por fuera del punto de equilibrio con las entradas al máximo.

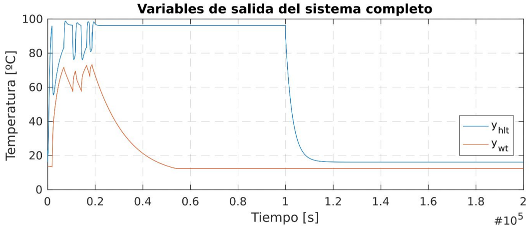
# Propiedad AG del sistema

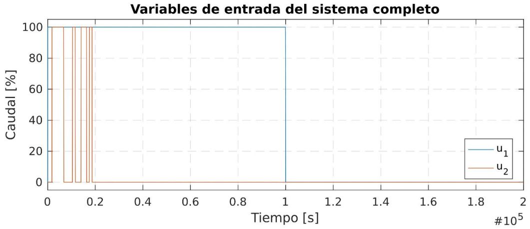


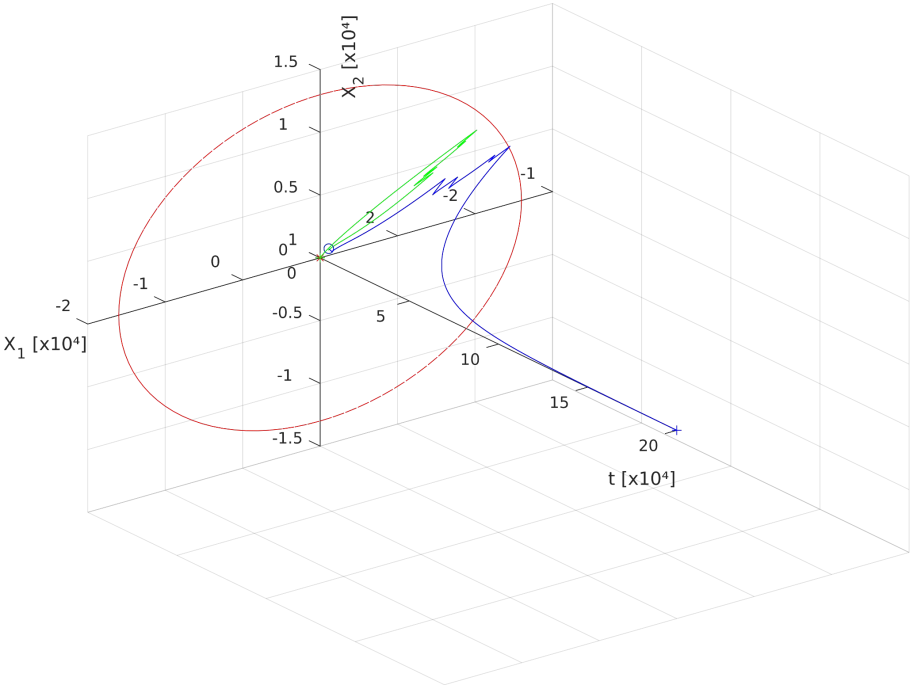



# Propiedad AG del sistema



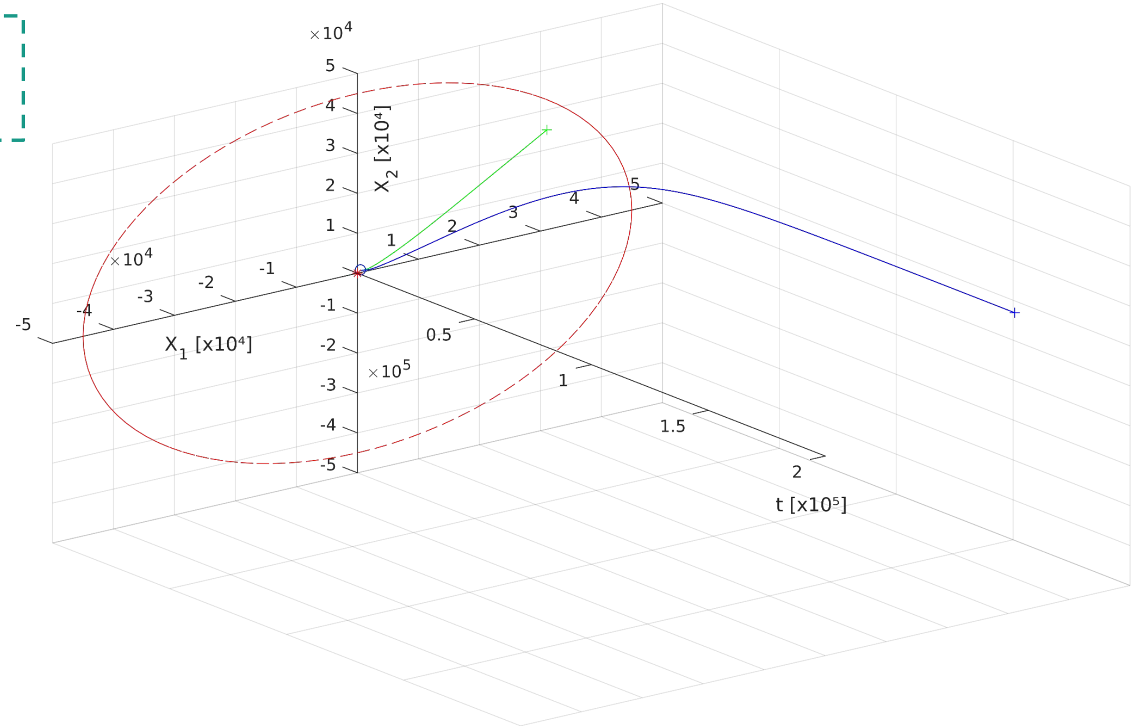



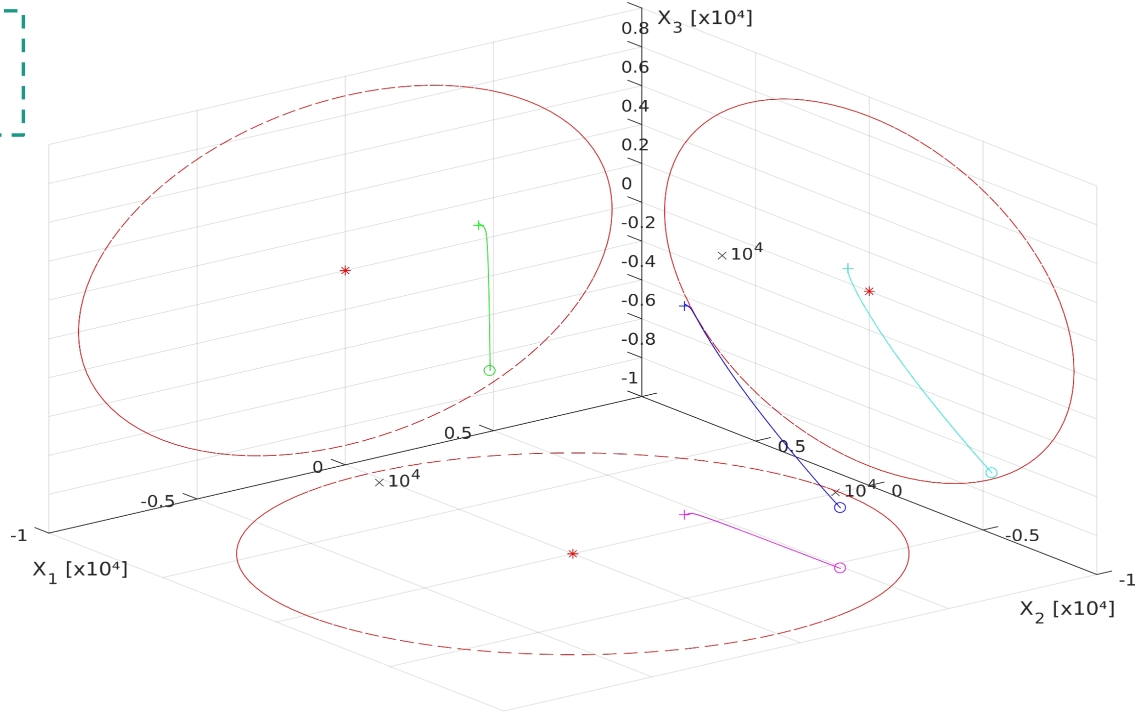
# Propiedad AG del sistema

Con entradas al máximo



# Propiedad AG del sistema

Con entradas iguales a cero



# Propiedad AG del sistema

Se observa que:

- En ausencia de entradas el sistema es exponencialmente estable (**0-GAS**)
- En presencia de entradas máximas, la salida es acotada (**AG**)
- Ante una entrada aleatoria que oscila entre el máximo y el mínimo el sistema mantiene la salida acotada (**AG**)

El sistema es **ISS** estable

# Muchas Gracias!

## Preguntas?